per tant, per esperonar-lo a arribar a les seves conclusions. Aquest procés de reflexió l'hauríem de fer tots més sovint, i per això seria desitjable que actes com aquest es fessin més sovint.

També es va parlar que calia motivar més l'alumnat potser modificant la didàctica habitual dels professors i encorretjant el treball en equip dins els departament.

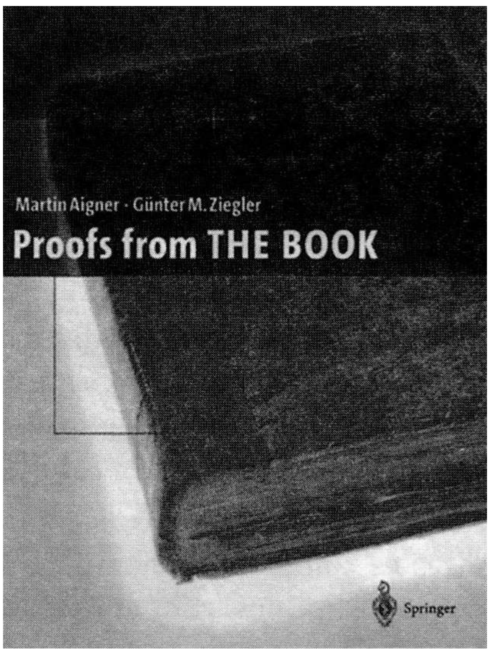
Jaume Serra
IES Vilatzara (Vilassar de Mar) APaMMs

Llibres

Proofs from The Book

Autor: Martin Aigner i Günter M. Ziegler.
Springer (1998).

Aquest llibre és el resultat d'un projecte iniciat fa uns anys pels autors, reconeguts investigadors en combinatòria i geometria, amb el gran Paul Erdös. La idea és simple: fer un recull de demostracions perfectes de teoremes matemàtics. Què és una demostració perfecta? Aquella que és fruit d'una idea brillant, d'una observació particularment penetrant o bé d'un raonament meravellosament simple. Segons li plaïa de dir a Erdös, hi ha un llibre, El Llibre, que recull totes aquestes proves; Déu manté aquest llibre i, molt de tant en tant, ens permet fer-hi una ullada. El text que avui comentem és una aproximació al Llibre. Malauradament, la mort d'Erdös l'estiu de 1996 li va impedir de veure'n el resultat final, publicat dos anys més tard. Però la seva participació, tant en l'estil com en la selecció dels temes, hi és ben visible.



El llibre es divideix en cinc parts: teoria de nombres, geometria, anàlisi, combinatòria i teoria de grafs. Cada part conté al voltant d'una mitja dotzena de teoremes, cadascun d'ells amb una, o més d'una segons el cas, demostració perfecta. La selecció dels resultats ha estat limitada pel fet que les proves havien de ser accessibles amb un mínim d'àlgebra lineal, aritmètica i anàlisi bàsica; i amb una dosi d'allò tan difícil de definir que anomenem maduresa matemàtica.

Tot seguit comentem alguns dels resultats dels capítols de combinatòria i de geometria. La part de combinatòria comença amb una petita curiositat: si tenim $n+1$ enters diferents entre 1 i $2n$, llavors n'hi ha dos que són primers entre sí. La prova no pot ser més simple, només cal observar que necessàriament n'hi ha dos que són consecutius. El segon resultat ja té més suc: en les mateixes condicions, cal provar que n'hi ha dos tals que un divideix l'altre. Considereu per a cada enter a el nombre senar m més gran que el divideix, és a dir, $a = 2^k m$ per algun k. Hi ha només n possibles valors per a m, però com que tenim $n+1$ enters, n'hi ha d'haver dos amb la mateixa m i és clar que un d'ells (el més petit) divideix l'altre. Si voleu iniciar un jove estudiant a la màgia de les matemàtiques, penseu a proposar-li aquest problema.

El resultat que ve a continuació és el famós:

Teorema d'Erdös-Szekeres. *Tota successió de $mn+1$ nombres reals diferents conté una subsuccessió creixent de longitud $m+1$, o bé una subsuccessió decreixent de longitud $n+1$.*

La demostració perfecta és un xic massa llarga per reproduir-la aquí; direm només que és també una aplicació brillant del principi de les caselles, segons el qual, si hi ha més fitxes que caselles, alguna casella ha de contenir més d'una fitxa. Més endavant, el mateix principi proporciona una prova molt simple del fet següent: si $t(n)$ és el nombre de divisors de n i

$$\overline{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j),$$

llavors $\overline{t}(n) \sim \log n$, amb un error més petit que 2. Resultat, d'altra banda, inesperadament simple si considerem el comportament força irregular de $t(n)$.

Més endavant trobem, oh sorpresa!, el teorema del punt fix de Brouwer: *tota aplicació contínua del disc unitat en si mateix té un punt fix.* La prova és de Sperner (1928) i fa servir un petit lema combinatori sobre 3-acoloriments de triangulacions planes; la resta és un bonic i elemental argument de compacitat. El mateix Sperner reapareix poques pàgines més enllà amb un famós teorema que també va demostrar l'any 1928, quan tenia 23 anys.

Teorema de Sperner. *Si $\mathcal{F}$ és una família de subconjunts de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que cap conjunt de $\mathcal{F}$ en conté un altre, llavors $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

És clar que la família de tots els subconjunts de mida $\lfloor n/2 \rfloor$ assoleix la fita. El problema és veure que no n'hi ha de més grans. Si no coneixeu el teorema i mireu de demostrar-lo, apreciareu de seguida la dificultat que s'amaga darrera un enunciat tant simple. La prova que presenten els autors, deguda a Lubell (1966), és d'una perfecció cristal·lina.

Passem ara a l'apartat de geometria, i ho fem amb un problema que Sylvester va plantejar al *The Educational Times* l'any 1893.

Problema de Sylvester. *Donats n punts en el pla, no tots ells sobre una recta, proveu que hi ha una recta que conté exactament dos d'aquests punts.*

No sabem del cert si Sylvester tenia una solució, però anys després en van aparèixer algunes. Considereu la següent, deguda a Kelly: si $\mathcal{P}$ és el conjunt de punts i $\mathcal{L}$ el conjunt de rectes determinades per parelles de punts de $\mathcal{P}$, preneu, entre tots els parells (P, l) amb $l \in \mathcal{L}$ i $P \notin l$, un parell (P_0, l_0) tal que la distància de P_0 a l_0 sigui mínima. Deixem al lector el plaer de concloure el raonament, tot demostrant que l_0 és una solució.

El teorema de Sylvester permet provar molt fàcilment el teorema següent, que és un cas particular d'un famós teorema d'Erdös i de Bruijn: *n punts en el pla, no tots ells sobre una recta, determinen com a mínim n rectes diferents.* La prova és per inducció sobre n, començant pel cas evident $n = 3$. Amb les notacions anteriors, sigui $|\mathcal{P}| = n + 1$. Pel teorema de Sylvester existeix una recta $l_0 \in \mathcal{L}$ que conté exactament dos punts P i Q de $\mathcal{P}$. Sigui $\mathcal{P}' = \mathcal{P}\backslash Q$ i $\mathcal{L}'$ el conjunt de rectes determinades per $\mathcal{P}'$. Si els punts de $\mathcal{P}'$ no estan tots sobre una recta, per inducció tenim que $|\mathcal{L}'| \ge n$ i la recta l_0 ens dóna $|\mathcal{L}| \ge n + 1$. Altrament, tenim un feix de rectes i $|\mathcal{L}| = n + 1$.

Més endavant trobem una segona prova del teorema de Sylvester com a aplicació de la fórmula d'Euler per a grafs planars. La fórmula d'Euler, sàviament aplicada, serveix també per provar el següent: donat un conjunt de punts en el pla de colors roig i blau, no tots ells sobre una recta, existeix una recta determinada per dos d'ells que només conté punts d'un color. Si penseu que el problema és senzill, podríeu trobar-vos amb una sorpresa.

L'últim problema que comentarem és el següent:

Problema dels símplexs mútuament adjacents. *Quin és el màxim nombre de símplexs de dimensió d que es poden situar a $\mathbf{R}^d$ de forma que cada dos d'ells es toquin, és a dir, es tallin en una secció de dimensió $d - 1$?*

Si $f(d)$ és aquest nombre, és conjectura que $f(d) = 2^d$. És clar que $f(1) = 2$ i és senzill veure que $f(2) = 4$. Joseph Zaks (1991) va provar que $f(3) = 8$ en una monografia de més de 100 pàgines. El mateix Zaks havia provat deu anys abans que $f(d) \ge 2^d$. No es coneixia cap fita superior raonablement bona fins que Micha Perles (un matemàtic singular a qui debem resultats de primera línia que sovint no publica) va provar que $f(d) \le 2^{d+1}$ en un article de dues pàgines l'any 1984. La prova és un autèntic prodigi d'elegància i simplicitat.

El llibre és ple de moltes altres gemmes que el lector, no ho dubtem, s'apressarà a admirar un cop hagi obert el llibre per la primera pàgina que, molt encertadament, comença amb la prova d'Euclides de la infinitud dels primers.

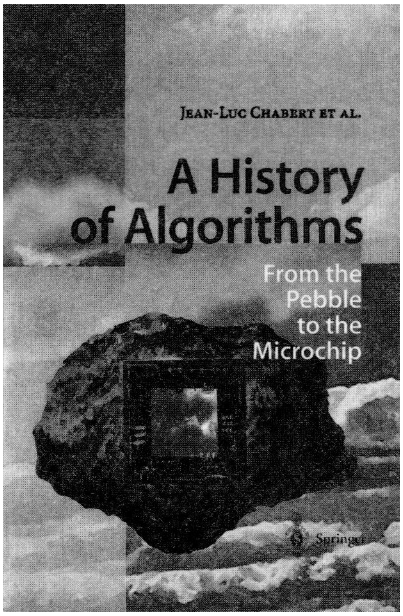
Finalment, cal destacar que l'estil i la presentació del material són excel·lents. Alguns dels capítols es completen amb apèndixs on es revisen conceptes bàsics, com ara els polinomis de Txebitxev, els cardinals infinits, o conceptes bàsics de probabilitat i de teoria de grafs. D'altra banda, l'edició és acuradíssima; la tipografia i la composició impecables, i les nombroses il·lustracions molt reeixides. Qualitats molt d'agrair en aquests temps moderns, en què la professionalitat en l'edició de textos matemàtics sembla en perill d'extinció.

M. Noy
UPC

A History of Algorithms

Autors: JEAN-LUC CHABERT *et al.*
Springer 1999.

Els algorismes han estat utilitzats d'ençà el principi dels temps i existeixen molt abans que tinguéssim un nom especial per descriure'ls. Inicialment els algorismes van ser simplement un conjunt d'instruccions, que un cop realitzades produeixen un determinat resultat. Més endavant la idea de finitud va entrar en la noció d'algorisme d'una manera essencial. Així l'Enciclopèdia Britànica descriu un algorisme com: un procediment matemàtic sistemàtic que produeix en un nombre finit de passos la resposta a una qüestió o la solució a un problema.



Més modernament un algorisme ha estat formulat pels informàtics: un programa d'ordinador és simplement un algorisme i un llenguatge d'ordinador és un llenguatge per escriure algorismes que un ordinador és capaç de llegir i executar. Però la idea de finitud no s'adapta completament bé a la d'algorisme. Molts algorismes no acabarien mai, com un algorisme per a calcular les xifres decimals del nombre pi, però els parem quan el valor aproximat de pi difereix de pi en una quantitat prèviament fixada. Així la idea d'iteració, recurrència o recursivitat juga un paper fonamental en la noció d'un algorisme i en el seu estudi teòric.

Els algorismes tractats en aquest llibre són algorismes numèrics, no inclouen algorismes d'altres àrees de les matemàtiques com puguin ser la geometria o la lògica.

Cada capítol està organitzat al voltant d'un nombre de textos originals seleccionats que reflecteixen diferents aspectes d'un mateix tema. El criteri utilitzat per seleccionar els textos, a part de la seva originalitat i del seu interès històric, ha estat que siguin accessibles als estudiants de matemàtiques, encara que els darrers capítols estan més pensats per a estudiants universitaris de matemàtiques. Les referències al final de cada capítol intenten proporcionar al lector un punt de partida per ampliar la seva visió en els temes tractats en el capítol.

Els temes tractats són els següents:

1. Operacions aritmètiques elementals.
2. Quadrats màgics.
3. Mètodes de falsa posició.
4. Algorisme d'Euclides.
5. Determinació del valor de pi.
6. Mètode de Newton.
7. Aproximacions successives.
8. Algorismes aritmètics.
9. Sistemes lineals.
10. Interpolació.
11. Quadratures.
12. Equacions diferencials.
13. Aproximació de funcions.
14. Acceleració de la convergència.
15. El concepte d'algorisme.

Els vuit primers capítols es centren en qüestions que tenen un origen molt antic, i que són essencialment problemes sobre nombres. Els darrers capítols tenen a veure amb algorismes per manejar conceptes més complexos. Una ullada ràpida als temes tractats pot fer pensar que aquest llibre és un llibre estàndard sobre l'anàlisi numèrica, però aquest no és el cas. L'èmfasi està posat en la introducció històrica de les tècniques, intentant descriure quina era la intenció de l'autor en introduir un nou algorisme o una idea nova en un algorisme ja existent.

El contingut del llibre arriba essencialment només fins als algorismes desenvolupats fins a finals del segle XIX o com a molt fins a principis del segle XX. El llibre està adreçat als estudiants, als professors i més generalment a qualsevol persona interessada en els algorismes numèrics i en la seva història.

J. Llibre
UAB

Jornades Científiques IEC. Physics and Geometry

Editors: David Jou i Sebastià Xambó.
IEC, 1999.

Aquest llibre conté els textos de les conferències corresponents a les **Jornades de Física i Geometria** que van tenir lloc a l'IEC els dies 2 i 3 de desembre de 1996.

Les conferències van ser les següents:

1. *Quantum Mechanics of Riemannian Geometry*, a càrrec d'Abhay Ashtekar del Centre de Física Gravitacional i Geometria de la Universitat de Pensilvania.
2. *Brisure de Symétrie Spontanée et Géometrie du Point de Vue Spectral*, a càrrec d'Alain Connes de l'Institut d'Alts Estudis Científics de París (IHES).
3. *Studying the Evolution of Cosmological Models*, a càrrec de Georg F. R. Ellis de la Universitat de Capedown, Àfrica del Sud.
4. *The Geometry of Quasicrystals*, a càrrec de Christian Janot de l'Institut Laue-Langevin de Grenoble.
5. *Topological Quantum Field Theory: A Prosperous Link Between Physics and Mathematics*, a càrrec de José M. L. Labastida de la Universitat de Santiago de Compostela.
6. *Unanswered Mathematical Questions Raised by Fractal Geometry*, a càrrec de Benoît B. Mandelbrot de la Universitat de Yale.
7. *Fractal Geometry and Physical Phenomena*, a càrrec de Luciano Pietronero de la Universitat de Roma.

Abans d'analitzar per separat cada una d'aquestes set conferències, hauríem de dir que constitueix un vertader plaer trobar junts uns textos tant diversos, tots d'una altíssima qualitat, amb el comú denominador de relacionar les matemàtiques i la física.

Quan vaig llegir el títol de la primera conferència vaig pensar que estava mal escrit perquè no l'entenia. Què vol dir *Mecànica Quàntica de la Geometria Riemanniana*? Ara us ho intentaré explicar breument. Diu l'autor que la descripció de la matèria com un continu s'ha revelat extraordinària a gran escala, però que la física a escales inferiors als 10^{-33} cm no té res a veure amb la física contínua que tots hem estudiat. L'autor diu que de manera anàloga hi hauria d'haver una geometria que fos com una quantització de la geometria riemanniana habitual. L'autor, que és físic, diu que s'hauria de copiar en geometria el que es fa en física quan es quantitza la relativitat general (teoria coneguda per *quantum gravity*). La dificultat més gran al meu entendre és que la *quantum gravity* que es pretén copiar encara no és una teoria ben establerta, sinó en formació. L'article té dues parts. En la primera s'indica com es pot reformular la relativitat general de manera que tingui l'aspecte d'una teoria *gauge*. En la segona part s'indica com aquesta descripció de la relativitat general condueix a una teoria quàntica de la geometria. Aquest punt de vista porta a considerar les quantitats clàssiques de la geometria riemanniana, com longituds, àrees i volums, d'una nova manera, com operadors amb valors propis discrets.

La segona conferència, d'Alain Connes, està molt relacionada amb l'anterior quant als objetius, però difereix en el punt de vista adoptat. El text és una reproducció de l'article publicat originàriament a *Astérisque 241* (*exposé*

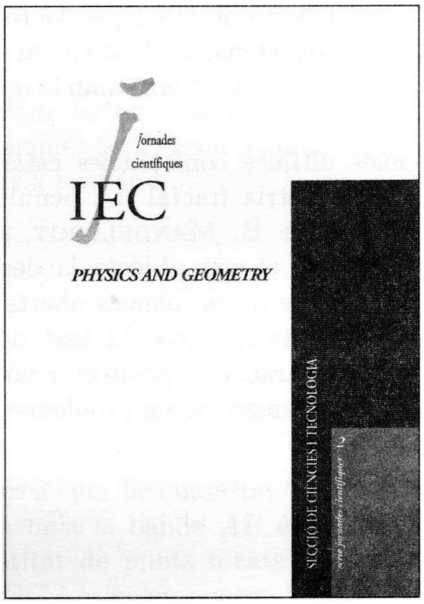
816, p. 313–349, 1996). L'objectiu principal de l'exposició és la presentació d'una noció nova d'espai geomètric en la qual s'abandona el paper central que en la geometria clàssica juguen els punts de l'espai. La nova visió permet una descripció satisfactòria de l'espaitemps de la relativitat per a fenòmens a escala molt petita. L'autor defineix el concepte d'espai geomètric com una terna $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, on $\mathcal{A}$ és una àlgebra involutiva d'operadors en un espai de Hilbert $\mathcal{H}$, i D és un operador autoadjunt no acotat de $\mathcal{H}$. Per tal d'interpretar aquesta definició l'autor recorda que quan l'àlgebra $\mathcal{A}$ és commutativa, la seva clausura segons la norma de $\mathcal{H}$ és l'àlgebra de les funcions contínues sobre un espai compacte M, i un punt de M es pot interpretar com un caràcter de $\overline{\mathcal{A}}$, és a dir, un homomorfisme $\chi : \overline{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$. En el cas general (en què $\mathcal{A}$ no és commutativa) aquesta noció de punt té poc interès. En canvi la de mesura de probabilitat conserva tot l'interès. Una tal mesura φ és una forma lineal positiva sobre $\mathcal{A}$ tal que $\varphi(1) = 1$. En lloc de mesurar distàncies entre punts es mesuren distàncies entre estats φ i ψ sobre $\overline{\mathcal{A}}$ per la fórmula

$$d(\varphi, \psi) = \mathrm{Sup}\ \{|\varphi(a) - \psi(a)|\,; \quad a \in \mathcal{A}, ||[D, a]|| \leq 1\}\ .$$

Es pot comprovar que aquesta fórmula dóna la distància geodèsica usual en el cas riemannià. La noció de dimensió d'un espai ha de ser substituïda en aquesta nova visió per un espectre de dimensió (un subconjunt acotat de $\mathbb{C}$ la part real del qual és acotada superiorment per $\alpha > 0$ si $\lambda_n^{-1} = O(n^{-\alpha})$, on λ_n és l'enèsim valor propi de $|D|$).

El problema principal d'aquesta nova visió és el d'adaptar el càlcul infinitesimal clàssic a aquest quadre general. El formalisme operacional de la mecànica quàntica junt amb l'anàlisi de les divergències logarítmiques dels operadors, dóna la generalització buscada del càlcul diferencial i integral.

La tercera conferència, de George F. R. Ellis, s'aparta molt de la temàtica de les dues anteriors: constitueix un *survey* sobre alguns aspectes dels models cosmològics de la relativitat general (clàssica) i la classificació d'aquests models segons les simetries que tenen. Els universos dits de Bianchi són analitzats detalladament (models cosmològics amb un grup G_3 d'isometries que actua transitivament sobre les superfícies espacials del model, de manera que aquestes són homogènies). S'estudia com aquests models evolucionen en el temps i com els atractors i els punts d'equilibri inestable ajuden a conjecturar quines són les més probables configuracions d'aquests moldels. També es parla de l'evolució de models més generals (no homogenis i anisòtrops).



La quarta conferència, de Christian Janot, està dedicada a la geometria dels quasicristalls. Es tracta d'una nova forma de l'estat sòlid que difereix de les altres dues formes conegudes (cristal·lina i amorfa). Per donar una idea de què és un quasicristall podem dir que un cristall es caracteritza per una repetició per translació d'una mateixa mostra (un enrajolat). Per exemple, si tinguéssim una mostra en dimensió 1 formada per un segment llarg L i un de curt C, la mostra s'aniria repetint per translacions i sortiria un cristall que es podria descriure per

$$\cdots LCLCLCLCLC \cdots$$

Els quasicristalls s'han de pensar també com estructures repetitives, però en les quals la mostra no es repeteix per translacions sinó per unes altres regles de substitució ben determinades. Per exemple, si la mostra és LC, podríem convenir que la regla per produir una nova cadena és substituir cada L per LC i cada C per L. D'aquesta manera en la primera substitució passaríem de LC a LCL. En la segona substitució obtindríem $LCLLC$. En la tercera, $LCLLCLCL$, etc. En cada pas s'obté una successió determinista de L i de C sense cap senyal aparent de periodicitat (en aquest cas s'obté una cadena de Fibonacci). Es donen molts exemples de quasicristalls en dimensions 2 i 3 i se n'estudia la geometria.

La cinquena conferència, de José M. F. Labastida, té per objecte explicar per què la topologia de dimensions baixes és rellevant en mecànica quàntica. Es fa un ràpid recorregut pels invariants Seiberg-Witten, per la teoria *gauge* de Chern-Simons i per la teoria de supersimetria de Donalson-Witten, al mateix temps que es relaciona tot això amb la mecànica quàntica.

Les dues últimes conferències estan dedicades a la geometria fractal. La penúltima, a càrrec de Benoît B. Mandelbrot, el creador de la teoria, té per objecte la descripció d'un gran nombre de problemes oberts relacionats amb aquesta matèria. El text no és de cap manera de caràcter expositori, sinó que es redueix a una enumeració de problemes oberts de geometria fractal que apareixen en contextos molt diversos, cada un d'ells acompanyat de comentaris.

L'última conferència, a càrrec de Luciano Petronero, sí que és de caràcter expositori. Té per objectiu la descripció de diverses situacions de naturalesa fractal que es presenten en el món real. Situacions que abans de l'aparició de la geometria fractal no es podien recòneixer. Per exemple, la distribució de galàxies i cúmuls de galàxies a l'Univers, a diverses escales, sembla tenir naturalesa fractal. A part de la descripció de models d'aquest tipus que apareixen a l'Univers, la pregunta cabdal és com la naturalesa produeix aquests tipus de fenòmens fractals. El text de la conferència, de caràcter col·loquial, fa un breu viatge per tots aquests problemes i en dóna referències precises per a aquells que desitgin profunditzar en alguns d'ells.

J. Girbau
UAB

Problemes

Podeu trobar informació sobre la XXXVI Olimpíada Matemàtica (fase catalana) celebrada el passat desembre a l'adreça

\texttt{http://www.iec.es/scm/olimp_c.htm}

I podeu trobar les solucions dels problemes de les Olimpíades a l'adreça:

\texttt{http://pie.xtec.es/recursos/mates/aqui/agenda.htm#OLIMP}

on, per cert, trobareu una col·lecció interessantíssima de problemes.

Us recomanem també que visiteu el web de la SCM

http://www.iec.es/scm/indpro_c.htm

on trobareu els enunciats i solucions de les proves **Cangur** 2000 celebrades el passat mes de març a Catalunya, les Illes Balears i Castelló.

A la mateixa pàgina hi trobareu el concurs telemàtic **Relleus–2000** que ha començat enguany com un complement per equips al Cangur, i també hi trobareu informació sobre el **Fem matemàtiques** organitzat per la FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya).

També preguem als nostres lectors que si fan servir Tex o Latex per escriure les seves solucions, les enviïn per *mail* a l'adreça:

pelegri.viader@econ.upf.es

així com qualsevol proposta o suggeriment.